

Propagation d'une onde électromagnétique U.H.F.

sur l'hélice court-circuitée d'un spectromètre R.P.E. ⁽¹⁾

C. BORDÉ ⁽²⁾
et P. BOYER

Laboratoire de Chimie théorique
Faculté des Sciences de Nancy

1. Introduction

La propagation d'une onde électromagnétique le long d'une structure hélicoïdale a été étudiée pour des applications aux tubes à onde progressive. Dans ce cas, l'extrémité terminale de l'hélice n'est pas court-circuitée et le problème de la réflexion de l'onde incidente ne se pose pas [1].

Dans les spectromètres à résonance paramagnétique électronique, on remplace parfois la cavité résonnante classique par une ligne à retard hélicoïdale, court-circuitée. Cette étude a pour but de préciser la forme d'une onde électromagnétique se propageant sur une telle structure.

Pour obtenir la forme de l'onde électromagnétique la plus générale, susceptible de se propager sur l'hélice, on utilise la méthode de BROMWICH [2].

En coordonnées cylindriques (z, ϕ, r), le champ électromagnétique variant sinusoïdalement en fonction du temps avec la pulsation ω , la fonction ψ de BROMWICH doit vérifier l'équation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_0^2 \psi = 0$$

avec :
$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

λ_0 étant la longueur d'onde dans le vide.

On cherche une solution de la forme :

$$\psi = Z(z) \Phi(\phi) R(r)$$

d'où :

$$\psi = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} [A_q^0 I_q(\gamma_q r) + B_q^0 K_q(\gamma_q r)] [C_q^0 \exp(-j\beta_q z) + D_q^0 \exp(j\beta_q z)] \exp(-jq\phi)$$

(1) Manuscrit remis par les auteurs en février 1967.

(2) Actuellement au Laboratoire de Spectroscopie Moléculaire de la Faculté des Sciences de Paris.

I_q et K_q étant les fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce, d'ordre q , avec :

$$\gamma_q^2 = \beta_q^2 - k_0^2 \quad \beta_q > 0.$$

L'expression de ψ fait apparaître la somme de deux termes représentant, l'un une onde se propageant dans le sens des z croissants (coefficients C_q^0), l'autre une onde se propageant en sens inverse (coefficients D_q^0).

On peut restreindre la généralité de cette fonction en tenant compte des propriétés de symétrie d'une hélice. Pour cela, on utilise le théorème de FLOQUET [3] que nous énoncerons ici sous la forme générale suivante : dans tout déplacement élémentaire, tel que la structure se trouve superposée à elle-même (groupe de recouvrement de la structure), la fonction d'onde de Bromwich est multipliée par un nombre complexe constant de la forme $\exp(j\delta)$ (à condition qu'il n'y ait pas d'atténuation dans le déplacement considéré).

Appliquons ces considérations à l'hélice de pas p , en admettant qu'il n'y ait pas d'atténuation le long de l'axe z de l'hélice.

2. Translation de l'hélice d'une longueur égale au pas p

Dans ce cas, le facteur multiplicatif constant peut s'écrire :

$\exp(-j\beta_0 p)$ pour une onde se propageant dans le sens $z > 0$,

et $\exp(j\beta_0 p)$ pour l'onde inverse.

Les fonctions les plus générales possédant cette propriété s'écrivent (développement en série de Fourier d'une fonction de période p) :

$$\sum_{m \geq 0} \exp(-j\beta_0 z) \exp\left(-2\pi m \frac{jz}{p}\right)$$

pour l'onde incidente,

$$\sum_{m \geq 0} \exp(j\beta_0 z) \exp\left(2\pi m \frac{jz}{p}\right)$$

pour l'onde réfléchie.

Nous sommes conduits à poser :

$$\beta_q = \beta_0 + m(q) \frac{2\pi}{p}$$

avec $\beta_0 < \frac{2\pi}{p}$ et $m(q)$ entier positif ne dépendant que de q .

3. Rotation de l'hélice de 2π

Nous retrouvons l'hélice dans la même position, donc la même fonction ψ .

Le nombre q est donc un entier positif, négatif ou nul.

4. Déplacement hélicoïdal

Le déplacement hélicoïdal est le produit de la translation p/b et de la rotation $2\pi/b$ où b est quelconque.

Nous retrouvons la même hélice décalée de p/b , donc la même fonction aller, au facteur constant près $\exp(-j\beta_0 p/b)$, et la même fonction retour, au facteur constant près $\exp(+j\beta_0 p/b)$ (en supposant que les angles ϕ sont comptés positivement dans le sens de rotation de l'hélice) puisque cette opération répétée b fois est identique à une translation de pas p .

On obtient :

$$\begin{aligned} - \text{ pour l'onde aller } & \begin{cases} q > 0 & C_q^0 \equiv 0 \\ q \leq 0 & m = -q \end{cases} \\ - \text{ pour l'onde retour } & \begin{cases} q \geq 0 & m = q \\ q < 0 & D_q^0 \equiv 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En définitive :

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_{q < 0} [A_q^0 I_q(\gamma_q r) + B_q^0 K_q(\gamma_q r)] C_q^0 \exp(-j\beta_0 z) \\ & \times \exp\left[jq\left(\frac{2\pi z}{p} - \phi\right)\right] + \sum_{q \geq 0} [A_q^0 I_q(\gamma_q r) + B_q^0 K_q(\gamma_q r)] D_q^0 \\ & \times \exp(j\beta_0 z) \exp\left[jq\left(\frac{2\pi z}{p} - \phi\right)\right] \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} I_{-n}(x) &= I_n(x) \\ K_{-n}(x) &= K_n(x) \\ \gamma_{-n}^2 &= \beta_{-n}^2 - k^2 = \beta_n^2 - k^2 = \gamma_n^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{q \geq 0} [A_q I_q(\gamma_q r) + B_q K_q(\gamma_q r)] \\ & \times [C_q \exp(-j\beta_q z + jq\phi) + D_q \exp(j\beta_q z - jq\phi)]. \end{aligned}$$

On peut séparer les modes $E(\text{TM})$ et $H(\text{TE})$ dont les composantes, au coefficient $e^{j\omega t}$ près, seront données par :

$$\begin{aligned} \text{TM} & \begin{cases} E_z = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi & E_r = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} & E_\phi = + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \phi} \\ H_z = 0 & H_r = \frac{jk}{r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} & H_\phi = -jk \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \\ \text{TE} & \begin{cases} E_z = 0 & E_r = -\frac{jk}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} & E_\phi = jk \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ H_z = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi & H_r = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r} & H_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \phi} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où, au coefficient multiplicatif $\exp(j\omega t)$ près et en appelant F_1 l'expression :

$$C_q \exp(-j\beta_q z) \exp(jq\phi) + D_q \exp(j\beta_q z) \exp(-jq\phi),$$

F_2 la même expression où le 2^e membre est précédé du signe $-$, F'_1 et F'_2 les expressions ci-dessus où les lettres C et D sont accentuées :

$$\begin{aligned} \text{TM} & \begin{cases} E_z = - \sum_{q \geq 0} \gamma_q^2 [A_q I_q(\gamma_q r) + B_q K_q(\gamma_q r)] \times F_1 \\ E_r = - \sum_{q \geq 0} j\beta_q [A_q I'_q(\gamma_q r) + B_q K'_q(\gamma_q r)] \times F_2 \\ E_\phi = \sum_{q \geq 0} \frac{q\beta_q}{r} [A_q I_q(\gamma_q r) + B_q K_q(\gamma_q r)] \times F_1 \\ H_z = 0 \\ H_r = - \sum_{q \geq 0} \frac{qk}{r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [A_q I_q(\gamma_q r) + B_q K_q(\gamma_q r)] \times F_2 \\ H_\phi = - \sum_{q \geq 0} jk \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [A_q I'_q(\gamma_q r) + B_q K'_q(\gamma_q r)] \times F_1 \end{cases} \\ \text{TE} & \begin{cases} E_z = 0 \\ E_r = \sum_{q \geq 0} \frac{qk}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [A'_q I_q(\gamma_q r) + B'_q K_q(\gamma_q r)] \times F'_2 \\ E_\phi = \sum_{q \geq 0} jk \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [A'_q I'_q(\gamma_q r) + B'_q K'_q(\gamma_q r)] \times F'_1 \\ H_z = - \sum_{q \geq 0} \gamma_q^2 [A'_q I_q(\gamma_q r) + B'_q K_q(\gamma_q r)] \times F'_1 \\ H_r = - \sum_{q \geq 0} j\beta_q [A'_q I'_q(\gamma_q r) + B'_q K'_q(\gamma_q r)] \times F'_2 \\ H_\phi = \sum_{q \geq 0} q \frac{\beta_q}{r} [A'_q I_q(\gamma_q r) + B'_q K_q(\gamma_q r)] \times F'_1 \end{cases} \end{aligned}$$

avec :

$$I'_q(\gamma_q r) = \frac{q}{r} I_q(\gamma_q r) + \gamma_q I_{q+1}(\gamma_q r)$$

$$K'_q(\gamma_q r) = \frac{q}{r} K_q(\gamma_q r) - \gamma_q K_{q+1}(\gamma_q r).$$

L'onde la plus générale sera obtenue en superposant une onde TM et une onde TE. Les champs devant rester finis dans tout l'espace, on doit avoir :

$$B_q = B'_q = 0 \text{ à l'intérieur de l'hélice,}$$

$$A_q = A'_q = 0 \text{ à l'extérieur de l'hélice.}$$

On pose :

$$\frac{D_q}{C_q} = \exp(2j\alpha_q) \quad \frac{D'_q}{C'_q} = \exp(2j\alpha'_q)$$

$$X_q = 2A_q C_q \exp(j\alpha_q) \quad X'_q = 2A'_q C'_q \exp(j\alpha'_q).$$

Les composantes E_r et E_ϕ s'écrivent, au coefficient multiplicatif $\exp(j\omega t)$ près, pour le champ intérieur :

$$E_r = - \sum_{q \geq 0} \left[\beta_q X_q I'_q(\gamma_q r) \sin(\beta_q z - q\phi + \alpha_q) \right.$$

$$\left. + j \frac{q k_0}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} X'_q I_q(\gamma_q r) \sin(\beta_q z - q\phi + \alpha'_q) \right]$$

$$E_\phi = \sum_{q \geq 0} \left[\frac{q \beta_q}{r} X_q I_q(\gamma_q r) \cos(\beta_q z - q\phi + \alpha_q) \right.$$

$$\left. + j k_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} X'_q I'_q(\gamma_q r) \cos(\beta_q z - q\phi + \alpha'_q) \right].$$

Ces expressions montrent qu'il est impossible d'écrire la condition imposée par un plan réflecteur métallique à $z = z_0$:

$$E_r(r, \phi, z = z_0) = E_\phi(r, \phi, z = z_0) = 0$$

E_r et E_ϕ ne pouvant s'annuler si $\alpha_q = \alpha'_q$ qu'en des points distants de $\lambda/4$.

Cette impossibilité est facile à interpréter physiquement : si l'onde incidente possède la symétrie d'une hélice droite (par exemple), l'onde réfléchie devra posséder la symétrie d'une hélice gauche et ne pourra donc pas se propager sur la même hélice que l'onde incidente.

Cependant, dans le cas des hélices utilisées en RPE, on peut mettre en évidence l'existence d'une onde réfléchie.

La contradiction entre la théorie précédente et l'expérience provient de ce que l'on impose a priori à la forme analytique de l'onde la symétrie hélicoïdale correspondant à une structure infinie. La présence d'un réflecteur est incompatible avec cette hypothèse.

L'étude de la propagation de l'onde réfléchie relèverait de la résolution complète des équations de Maxwell avec des conditions aux limites correctes c'est-à-dire tenant compte simultanément de la présence de l'hélice et du réflecteur.

On peut toujours supposer que si l'hélice est assez longue devant la longueur d'onde (*), la perturbation apportée par le réflecteur à la symétrie hélicoïdale de l'onde ne se manifeste qu'en bout d'hélice.

On peut alors conserver le modèle d'une onde de symétrie hélicoïdale en laissant des $\alpha_q \alpha'_q$ indéterminés.

Ces quantités traduisent la réflexion de l'onde de symétrie hélicoïdale provoquée par l'ensemble réflecteur-partie terminale de l'hélice.

Les expressions précédentes qui s'écrivent sous la forme du produit d'une fonction d'espace par une fonction de temps, caractérisent un système d'ondes stationnaires.

On peut maintenant écrire que le champ électrique est normal à la direction θ des spires pour $r = a$ (rayon de l'hélice), ce qui revient à assimiler l'hélice à un cylindre de conductibilité infinie suivant la direction θ et de conductibilité nulle dans la direction perpendiculaire (fig. 1).

$$E_z(r = a) \sin \theta + E_\phi(r = a) \cos \theta = 0.$$

En écrivant que cette égalité doit être vérifiée quels que soient z et ϕ , on arrive aux conditions :

$$X'_q = -j X_q \frac{1}{k_0} \frac{I_q(\gamma_q a)}{I_{q+1}(\gamma_q a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\gamma_q \operatorname{tg} \theta - \frac{q \beta_q}{a \gamma_q} \right)$$

$$\alpha_q = \alpha'_q.$$

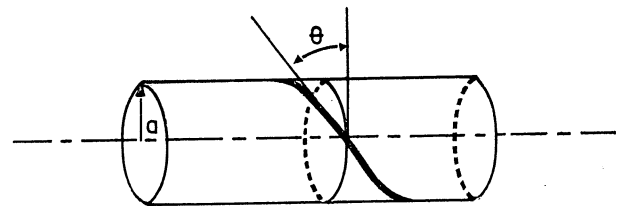


FIG. 1. — Hélice

Les autres conditions aux limites étant :

— continuité du champ électrique tangentiel sur le cylindre,

— continuité de la composante tangentielle du champ magnétique parallèle aux spires sur le cylindre (puisque'il n'y a pas de courant perpendiculairement aux spires).

Ces conditions fournissent les γ_q et les constantes relatives au champ extérieur.

* Ceci est le cas des hélices utilisées en pratique [4, 5].

En considérant la superposition des modes fondamentaux ($q = 0$) et en négligeant provisoirement les harmoniques d'espace ($q \neq 0$), on obtient :

$$(\gamma_0 a)^2 \frac{I_0(\gamma_0 a) K_0(\gamma_0 a)}{I_1(\gamma_0 a) K_1(\gamma_0 a)} = (k_0 a \cotg \theta)^2,$$

expression identique à celle établie par PIERCE [1] dans le cas d'une onde progressive.

La résolution de cette équation conduit à $\lambda = \lambda_0 / 2\pi n a$ où a est le rayon des spires et n le nombre de spires par unité de longueur.

Remarque

La vitesse de propagation des harmoniques d'espace peut être déduite comme précédemment mais on peut aussi écrire :

$$\beta_q = \beta_0 + q \frac{2\pi}{p},$$

d'où :

$$\frac{1}{\lambda_q} = \frac{1}{\lambda_{q=0}} 2\pi n a + q n.$$

Il est probable que, dans nos conditions d'expérience, c'est le mode fondamental à symétrie axiale qui est préférentiellement excité [5].

Les lignes à retard, du type hélice court-circuitée, présentent des effets de résonance comme les cavités.

En effet, considérons la composante H_z qui joue un rôle important en RPE :

$$H_z = -\gamma_0^2 X'_0 I_0(\gamma_0 r) \cos(\beta_0 z + \alpha_0) \exp(j\omega t).$$

Pour $z = 0$, $r = 0$, $H_z = h(0) =$ amplitude communiquée par le couplage guide-hélice

$$-\gamma_0^2 X'_0 = \frac{h(0)}{\cos \alpha_0}.$$

On voit ainsi que pour $\alpha_0 = (2k+1)\pi/2$, l'amplitude $\gamma_0^2 X'_0$ de H_z devient très grande, on a donc une résonance.

Expérimentalement, ces résonances peuvent être mises en évidence (fig. 2) à l'aide d'un réflectoscope, appareil qui permet de visualiser la variation du

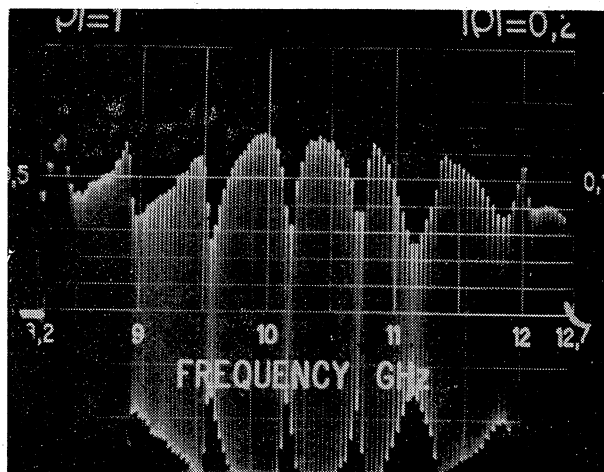


FIG. 2.

module du coefficient de réflexion d'une structure électromagnétique dans la bande X.

D'autre part, en RPE elles se traduisent par une augmentation brutale de sensibilité [6].

En RPE, on pourra donc combiner un effet de résonance avec l'interaction multiple et la compression de l'onde.

**

Nous remercions MM. les Professeurs BARRIOL et UEBERSFELD qui ont bien voulu relire ce manuscrit et nous ont prodigué leurs conseils.

Nous sommes d'autre part reconnaissants à M. DUQUESNE de Philips Industrie pour avoir bien voulu mettre son réflectoscope à notre disposition.

Bibliographie

- [1] PIERCE J.R. — Traveling Wave Tubes, Ed. Van Nostrand, (New York, 1950).
- [2] ANGOT A. — Compléments de Mathématiques à l'usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunications, Ed. de la Revue d'Optique (Paris 1961).
- [3] SLATER J.C. — Microwave Electronics, Ed. Van Nostrand (New York, 1958).
- [4] LAMER A. — D.E.S. (Paris, 1965).
- [5] BORDÉ Ch. — D.E.S. (Nancy, 1966).
- [6] BORDÉ Ch. et BOYER P. — J. de Phys. Appliquée 2(1967) 128.