

## Amplification de champs atomiques par émission stimulée d'atomes

Ch.J. Bordé

Laboratoire de Physique des Lasers, Unité associée au CNRS (U.R.A. 282) et à l'Université Paris-Nord, Institut Galilée, Université Paris XIII, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

et

Laboratoire de Gravitation et Cosmologie Relativistes, Unité associée au CNRS (U.R.A. 769) et à l'Université Pierre et Marie Curie, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

**Abstract:** We show that the roles of the photon and of the ground state atom can be exchanged in the process of stimulated emission, if the atoms are bosons. This leads to the possibility to amplify atomic fields from excited atoms and more generally from any composite object containing the atom, which may spontaneously dissociate. We derive the rate equations for the population of bosons using relativistic quantum field theory and density matrix diagrams.

### 1. INTRODUCTION

Nous sommes tous habitués à l'idée qu'un champ lumineux puisse être amplifié par émission stimulée de photons à partir d'un atome excité. Nous sommes plus déconcertés devant l'idée du processus réciproque que serait l'amplification d'un champ atomique par émission stimulée d'atomes. Pourtant il existe une symétrie profonde entre les deux processus. L'un comme l'autre ne fait appel qu'au caractère bosonique des particules lors d'une désintégration, indépendamment des détails subtils de cette désintégration. En tant que particules, le photon comme l'atome satisfont à la même cinématique relativiste et sont décrits par des représentations du groupe de Poincaré, qui ne diffèrent que par leur masse. Nous allons voir que l'on peut à partir de ces seuls ingrédients, écrire une théorie de l'amplification des champs de bosons, qui redonne l'essentiel de ce que nous connaissons de l'amplification des ondes lumineuses et qui s'applique aussi à celle des ondes de matière. Remarquons d'abord, qu'amplifier un champ ne signifie pas créer de l'énergie ou de la matière à partir de rien, mais bien rediriger de l'énergie ou de la matière plus ou moins désordonnées dans un mode de propagation unique, au moyen du processus naturel

spontané qu' est la désintégration:



où  $C$  est l'atome excité (plus généralement un corps composite),  $B$  le boson (photon ou atome dans l'état de base) et  $A$  le partenaire (atome ou photon). L'émission de  $B$  va être orientée dans le mode voulu par le caractère grégaire des bosons. Ce

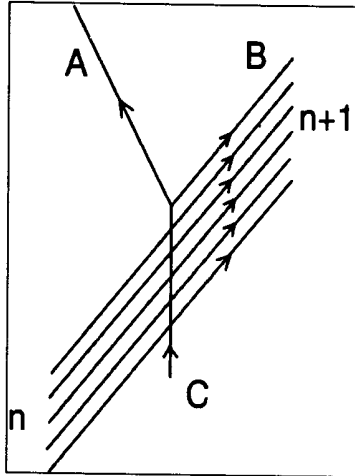


Figure 1: Emission stimulée d'un boson  $B$  par la particule composite  $C$ . Si  $C$  est un atome excité,  $B$  pourra être un photon ou un atome dans l'état de base.

sont uniquement les propriétés statistiques d'échange des particules indiscernables, que sont les bosons, qui confèrent à l'émission dans le même mode une probabilité d'émission  $n + 1$  fois plus importante que l'émission spontanée,  $n$  étant le nombre de bosons déjà présents dans le mode. Il est important de noter que ces bosons partenaires n'interagissent pas directement avec  $C$ .

L'outil naturel qui va permettre d'exprimer le caractère bosonique est la deuxième quantification, c'est-à-dire l'introduction d'opérateurs de création  $c_B^\dagger(\vec{p})$  et d'annihilation  $c_B(\vec{p})$  des particules  $B$  d'impulsion  $\vec{p}$ , satisfaisant à des règles de commutation:

$$[c_B(\vec{p}), c_B^\dagger(\vec{p}')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2)$$

L'outil naturel qui va permettre ensuite d'introduire la cinématique relativiste et les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie qui en découlent, est la théorie quantique relativiste des champs.

## 2. LES OPERATEURS CHAMPS DE BOSONS

A chacune des particules  $A, B, C$  on associe un opérateur champ, susceptible de la créer ou de l'annihiler au point d'espace-temps  $x = (\vec{r}, t)$ . Par leur caractère

spinoriel, ces opérateurs prennent également en compte le spin de ces particules. Ici, pour simplifier nous ne considérerons que des particules de spin zéro et donc des opérateurs de Klein-Gordon de la forme:

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_\alpha(p)}} c_\alpha(\vec{p}) \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E_\alpha(p)t)/\hbar] \quad (3)$$

où

$$E_\alpha(p) = ((E_\alpha^0)^2 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

est l'énergie relativiste de la particule  $\alpha$  ( $\alpha = A, B, C$ ) et où  $E_\alpha^0/c^2 = M_\alpha$  est sa masse au repos, incluant l'énergie d'excitation interne (Figure 2).

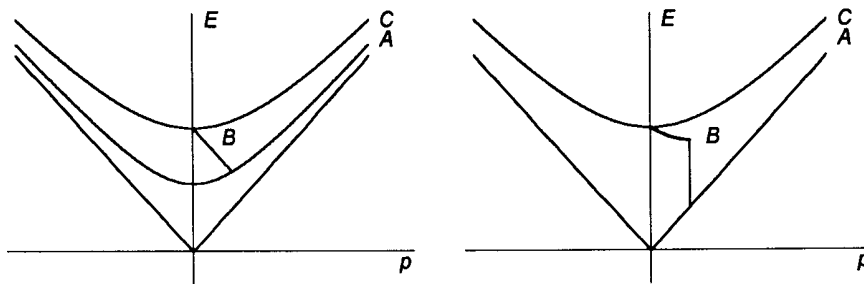


Figure 2: Diagrammes d'énergie-impulsion pour chacune des particules A, B, C. Les particules A et C constituent les niveaux inférieur et supérieur, la particule B est le boson émis: photon pour la figure de gauche, atome pour la figure de droite. Dans le cas des photons, la couche de masse est un cône et la pente correspondante est c.

Les expressions précédentes utilisent un développement en ondes planes. Pour les états à plusieurs particules, il est plus commode d'introduire une base de modes discrets  $v_{\alpha m}(x)$  tels que:

$$\phi_\alpha(x) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{2V_m E_\alpha(p_{\alpha m})}} c_{\alpha m} v_{\alpha m}(x) \exp[i(\vec{p}_{\alpha m} \cdot \vec{r} - E_\alpha(p_{\alpha m})t)/\hbar] \quad (5)$$

où

$$V_m = \int d^3x v_{\alpha m}(x) v_{\alpha m}^*(x) \quad (6)$$

est le volume du mode. Pour les photons, considérés ici, pour simplifier, comme particules scalaires, les fonctions  $v_{\alpha m}(x)$  seront, par exemple, les modes d'Hermite-Gauss d'une cavité laser.

### 3. HAMILTONIEN ET EQUATION DE LIOUVILLE-VON NEUMANN

Nous écrivons l'Hamiltonien d'interaction à partir d'une densité hamiltonienne effective  $\tilde{\mathcal{H}}(x)$  en représentation d'interaction:

$$\tilde{V}(t) = \int d^3x \tilde{\mathcal{H}}(x) \quad (7)$$

écrite sous la forme:

$$\tilde{\mathcal{H}}(x) = g_R \phi_A^\dagger(x) \phi_B^\dagger(x) \phi_C(x) + h.c. \quad (8)$$

où les opérateurs de champs quantiques  $\phi_A^\dagger(x)$  et  $\phi_B^\dagger(x)$  créent respectivement les particules  $A$  et  $B$  et où  $\phi_C(x)$  annihile la particule  $C$  au point d'espace-temps  $x$ , et où  $g_R$  est une constante de couplage effective, qui sera exprimée à partir de la durée de vie de  $C$ . Pour les transitions dipolaires électriques, elle est reliée au moment de transition [2]. Une écriture covariante de l'interaction dipolaire électrique implique l'introduction de champs de spin non nul [1]. Ici, pour simplifier, nous nous en tiendrons au modèle scalaire (on trouvera dans l'appendice 1 une densité hamiltonienne non-relativiste pour l'interaction dipolaire électrique, prenant en compte le spin 1 du photon).

Cet Hamiltonien est porté dans l'équation d'évolution de l'opérateur densité, l'équation de Liouville-Von Neumann, en représentation d'interaction (voir l'appendice 2):

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)] \quad (9)$$

ou sous forme intégrale:

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')] \quad (10)$$

Si on remplace  $\tilde{\rho}(t)$  dans l'équation 9 par sa forme intégrale 10, on obtient la dérivée temporelle de l'opérateur densité sous forme intégrale exacte:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \int d^3x [\tilde{\mathcal{H}}(x), \tilde{\rho}(t_0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int d^3x \int d^3x' \int_{t_0}^t dt' [\tilde{\mathcal{H}}(x), [\tilde{\mathcal{H}}(x'), \tilde{\rho}(t')]] \quad (11)$$

Nous désignerons par  $\rho(t)$  l'opérateur densité réduit, obtenu en prenant la trace partielle de  $\tilde{\rho}(t)$  sur les modes vides de  $B$  et sur tout ce qui est externe à  $A, B, C$ :

$$\rho(t) = Tr_{Bm' \neq m} \tilde{\rho}(t) \quad (12)$$

L'équation 11 peut être utilisée pour obtenir une équation pilote pour  $\rho(t)$  avec l'approximation de Markov. On supposera pour cela que, dans l'équation 11,  $\tilde{\rho}(t')$  peut être factorisé en:  $\tilde{\rho}(t') = \rho(t') \otimes \sum_{m' \neq m} |0_{Bm'}\rangle \langle 0_{Bm'}|$  (où  $|0_{Bm'}\rangle$  est l'état vide de  $Bm'$ ) et pris au temps  $t$  ce qui permet de le sortir de l'intégrale, dont on étend la borne inférieure  $t_0$  à  $-\infty$ . On retrouve ainsi le coefficient  $A$  d'Einstein pour le processus de dissociation spontanée. Ce calcul est détaillé dans la référence [2]

dans le cas de trois particules  $A, B, C$  massives et il redonne le résultat classique de l'émission spontanée de photons si la masse de  $A$  ou de  $B$  est nulle.

La relaxation introduit dans l'équation (9) un hamiltonien non hermitique  $V - i\hbar\Gamma/2$  ou plus généralement un superopérateur de relaxation  $R$  dans le liouvillien  $L + iR$  comme dans la référence [1]. Ici, pour simplifier, nous nous contenterons de l'opérateur  $\Gamma$ , dont on trouvera l'expression dans [2] prenant en compte la dissociation spontanée de  $C$ , auquel on ajoutera une relaxation phénoménologique pour  $A$  et  $B$  au moyen de constantes  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$ . Pour représenter les mécanismes de pompage, l'opérateur densité  $\rho(t)$  est ensuite sommé sur tous les instants de formation  $t_0$  et ceci introduit un opérateur de pompage  $\Lambda(t)$  dans l'équation (9) [1]. Les équations (9), (10) et (11) deviennent:

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = i\hbar \Lambda(t) + [V(t), \rho(t)] - \frac{i\hbar}{2} (\Gamma \rho(t) + \rho(t) \Gamma) \quad (13)$$

$$\rho(t) = \rho^{(0)}(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\frac{\Gamma}{2}(t-t')] [V(t'), \rho(t')] \exp[-\frac{\Gamma}{2}(t-t')] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = & \frac{\partial \rho^{(0)}(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} [\Gamma (\rho(t) - \rho^{(0)}(t)) - (\rho(t) - \rho^{(0)}(t)) \Gamma] + \frac{1}{i\hbar} [V(t), \rho^{(0)}(t)] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t dt' [V(t), \exp[-\frac{\Gamma}{2}(t-t')] [V(t'), \rho(t')] \exp[-\frac{\Gamma}{2}(t-t')]] \end{aligned} \quad (15)$$

où  $\rho^{(0)}(t)$  est l'opérateur densité en l'absence de  $V$  que nous supposons indépendant du temps, spatialement uniforme et diagonal dans une base de Fock, avec une distribution de Maxwell-Boltzmann  $F(\vec{p})$  des impulsions de  $A$  et  $C$  (ou de Planck pour les photons):

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} = & [|0_A\rangle\langle 0_A| \otimes h^3 n_C^{(0)} \iint d^3 p_C d^3 p'_C F_C(\vec{p}_C) \delta(\vec{p}_C - \vec{p}'_C) |1_{\vec{p}_C}\rangle\langle 1_{\vec{p}'_C}| \\ & + |0_C\rangle\langle 0_C| \otimes h^3 n_A^{(0)} \iint d^3 p_A d^3 p'_A F_A(\vec{p}_A) \delta(\vec{p}_A - \vec{p}'_A) |1_{\vec{p}_A}\rangle\langle 1_{\vec{p}'_A}|] \\ \otimes & \sum_{n_{Bm}, n'_{Bm}} |n_{Bm}\rangle\langle n'_{Bm}| \rho_{n_{Bm}, n'_{Bm}} \end{aligned} \quad (16)$$

On a introduit les populations  $n_C^{(0)}$  et  $n_A^{(0)}$  à l'ordre zéro comme facteurs multiplicatifs.

Ce schéma d'introduction de la relaxation ne s'applique qu'aux états à une particule. Pour les états multiparticulaires, il faut associer la constante de relaxation, sous la forme  $E_\alpha - i\hbar\Gamma_\alpha/2$ , à l'énergie dans les opérateurs de champ et donc dans les propagateurs.

4. EQUATION D'EVOLUTION DE LA POPULATION DE BOSONS

L' equation (15) peut être directement utilisée pour tirer  $\partial\rho(t)/\partial t$  à partir de  $\rho^{(0)}$  dans une approche perturbative au deuxième ordre en  $V(t)$ , où seul intervient le dernier terme dans lequel  $\rho(t')$  est remplacé par  $\rho^{(0)}$ . A cet ordre et avec l'approximation des ondes tournantes, on a huit termes provenant du double commutateur, dans lequel on a remplacé  $\tilde{\mathcal{H}}(x)$  par les deux termes de 8. Chacun de ces termes peut être représenté par un diagramme tel que ceux de la figure 3 et leurs conjugués.

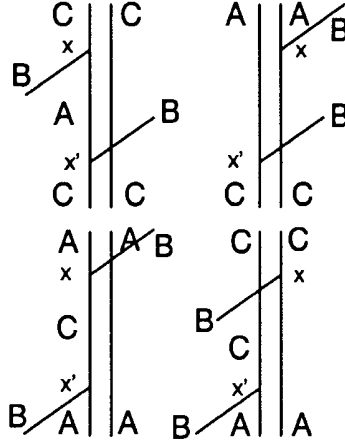


Figure 3: Diagrammes de matrice densité: l'axe des temps est vertical.

Le taux d'accroissement du nombre moyen de bosons  $B$  dans le mode  $m$  est donné par:

$$\frac{\partial \bar{n}_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n_{Bm}} \langle n_{Bm} | c_{Bm}^\dagger c_{Bm} Tr_{AC}(\rho) | n_{Bm} \rangle = \sum_{n_{Bm}} n_{Bm} Tr_{AC} \langle n_{Bm} | \frac{\partial \rho}{\partial t} | n_{Bm} \rangle \tag{17}$$

et le coefficient d'amplification est lié à ce taux par la vitesse de groupe  $v_g^{(B)}$  de l'onde bosonique:

$$\alpha_m = \frac{1}{v_g^{(B)}} \frac{1}{\bar{n}_{Bm}} \frac{\partial \bar{n}_{Bm}}{\partial t}$$

Nous n'écrivons explicitement ce taux que pour le premier diagramme de la figure 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}_{Bm}}{\partial t} &= -\frac{g_R^2}{\hbar^2} \int d^3 p_C \int d^3 x \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \langle 0_A | \phi_A(x) \phi_A^\dagger(x') | 0_A \rangle \\ \sum_{n_{Bm}} n_{Bm} \rho_{n_{Bm}} &\langle n_{Bm} | \phi_{Bm}(x) \phi_{Bm}^\dagger(x') | n_{Bm} \rangle \langle 1_{\vec{p}_C} | \phi_C^\dagger(x) \phi_C(x') | 1_{\vec{p}_C} \rangle \\ &\exp[-(\Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_C)(t - t')/2] h^3 n_C^{(0)} F_C(\vec{p}_C) + c.c. \end{aligned} \tag{18}$$

+ six autres termes de même structure+termes de pompage et de perte.

Les éléments de matrice du type  $\langle 0_A | \phi_A(x)\phi_A^\dagger(x') | 0_A \rangle$  sont des propagateurs:

$$i\Delta_A^{(+)}(x-x') = \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^3p_A}{2E_A(p_A)} \exp\{i[\vec{p}_A \cdot (\vec{r}-\vec{r}') - E_A(p_A)(t-t')]/\hbar\} \quad (19)$$

et

$$\begin{aligned} &\langle n_{Bm} | \phi_{Bm}(x)\phi_{Bm}^\dagger(x') | n_{Bm} \rangle = (n_{Bm} + 1) \\ &\frac{v_{Bm}(x)v_{Bm}^*(x')}{2V_m E_B(p_{Bm})} \exp\{i[\vec{p}_{Bm} \cdot (\vec{r}-\vec{r}') - E_B(p_{Bm})(t-t')]/\hbar\} \end{aligned} \quad (20)$$

On trouve après intégration sur  $x'$  et  $x$  (on a supposé  $x' \simeq x$  dans  $v_m^*$  par simplicité<sup>1</sup>):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}_{Bm}}{\partial t} &= \sum_{n_{Bm}} \mathcal{G}_C [-n_C^{(0)} n_{Bm} (n_{Bm} + 1) \rho_{n_{Bm}} + n_C^{(0)} n_{Bm}^2 \rho_{n_{Bm}-1}] \\ &\quad + \mathcal{G}_A [-n_A^{(0)} n_{Bm}^2 \rho_{n_{Bm}} + n_A^{(0)} n_{Bm} (n_{Bm} + 1) \rho_{n_{Bm}+1}] + \Lambda_{Bm} - \Gamma_{Bm} \bar{n}_{Bm} \\ &= (n_C^{(0)} \mathcal{G}_C - n_A^{(0)} \mathcal{G}_A) \bar{n}_{Bm} + n_C^{(0)} \mathcal{G}_C + \Lambda_{Bm} - \Gamma_{Bm} \bar{n}_{Bm} \end{aligned} \quad (21)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_C &= \frac{g_R^2}{8\hbar^2 E_B(p_{Bm})} \int_0^{+\infty} d\tau \iint \frac{d^3p_A}{E_A(p_A)} \frac{d^3p_C}{E_C(p_C)} \\ &\quad \exp\{i[E_C(p_C) - E_A(p_A) - E_B(p_{Bm})]\tau/\hbar - \Gamma_t \tau/2\} \\ &\quad \delta(\vec{p}_C - \vec{p}_A - \vec{p}_{Bm}) F_C(\vec{p}_C) + c.c. \end{aligned} \quad (22)$$

avec  $\Gamma_t = \Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_C$  et une expression analogue pour  $\mathcal{G}_A$  où la distribution  $F_C(\vec{p}_C)$  est remplacée par  $F_A(\vec{p}_A)$ .

L'équation 21 est identique à celle que l'on utilise pour décrire l'évolution du nombre moyen de photons dans un laser dans le régime linéaire, c'est-à-dire en l'absence de saturation: le premier terme décrit l'amplification par émission stimulée lorsque les populations sont inversées et le deuxième terme décrit l'émission spontanée dans le mode. Ces équations s'appliquent donc également à l'atomaser dans lequel les photons sont remplacés par des atomes bosoniques.

La forme de raie contenue dans  $\mathcal{G}$  peut être élargie de façon soit homogène, soit inhomogène suivant que  $\Gamma_t$  est supérieur ou non à la largeur inhomogène déterminée par le domaine de variation de la différence des énergies  $E_C(p_C) - E_A(p_A) - E_B(p_{Bm})$  lorsque  $\vec{p}$  varie dans  $F(\vec{p}_C)$  ou  $F(\vec{p}_A)$ . Cette forme de raie est calculée dans ces deux cas extrêmes dans la référence [2]. Dans le cas où le boson  $B$  est un photon, on retrouve les formules classiques du gain dans un laser, avec soit un profil Lorentzien, soit un profil Doppler gaussien et un profil de Voigt dans le cas général. Par contre,

<sup>1</sup>Si on compare cette expression à l'équation (101) de la référence [1] on voit que ceci a pour conséquence de négliger les effets de temps de transit fini sur la forme de raie.

dans le cas de l'amplification d'une onde atomique par des atomes excités, le régime de l'élargissement homogène est très difficile à atteindre. On peut voir sur la figure 2, que dans ce cas, la largeur  $M_C u$  de la distribution des impulsions de l'atome excité, se trouve amplifiée par la pente  $c$  du cône de lumière, en une distribution des énergies sur l'axe vertical, dont la largeur  $M_C u c$  sera, en général, beaucoup plus grande que  $\hbar\Gamma_t$ .

Les formules, qui donnent le gain, sont comparables pour la lumière et pour les atomes et on en trouvera les expressions détaillées dans [2]. Dans les deux cas  $\mathcal{G} \sim \Gamma_C \lambda^3$  de sorte que si on sait réaliser des longueurs d'onde de de Broglie atomiques comparables à des longueurs d'onde optiques, on peut s'attendre à des gains du même ordre. Il faudra calculer les termes d'ordre supérieur à deux, pour rendre compte de la saturation du gain et essayer de tenir compte des collisions atomiques pour évaluer les pertes.

Le formalisme présenté permet également d'appréhender l'interaction d'un faisceau laser avec un champ atomique tel que celui produit par un condensat de Bose-Einstein ou tel que pourrait le produire un atomaser. Dans ce cas les deux champs  $A$  et  $B$  sont bosoniques et les opérateurs densité à l'ordre zéro auront une expression comparable dans l'équation 16 donnant  $\rho^{(0)}$ . Ce formalisme place les photons et les atomes sur un même plan et donne les bases d'une approche unifiée entre optique photonique et optique atomique. Il subsiste un point ouvert, qui est celui de l'existence physique d'états cohérents pour les champs atomiques. Il existe une règle de supersélection, liée à la conservation de la charge baryonique qui s'oppose à la réalisation de tels états, à moins d'invoquer une brisure de symétrie. Notre densité hamiltonienne d'interaction conserve la charge baryonique et permet des superpositions cohérentes d'états à nombres d'occupation de  $B$  différents, mais qui sont enchevêtrés avec des états correspondants de  $A$  et  $C$ .

## 5. APPENDICES

### 1-Interaction dipolaire électrique non-relativiste:

Dans le cas où  $A$  ou  $B$  sont des photons, on pourra écrire une théorie non-relativiste prenant en compte leur spin en introduisant l'opérateur champ électrique transverse:

$$\vec{\mathcal{E}}(x) = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left( \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} \sum_{\lambda=1}^2 \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} a_{\lambda}(\vec{k}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] + h.c. \quad (23)$$

où  $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}$  est un vecteur polarisation unitaire perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

On pourra, par exemple, le coupler avec des champs atomiques non-relativistes de spin zéro et un (transition  $F = 0 \longleftrightarrow F = 1$ ):

$$\varphi_{\alpha}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p c_{\alpha}(\vec{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - (E_{\alpha}^0 + \frac{p^2}{2M})t)\right] \quad (24)$$



$$\vec{\varphi}_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p \sum_{\lambda=1}^3 \hat{\zeta}_{\vec{p}\lambda} c_{\alpha\lambda}(\vec{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - (E_\alpha^0 + \frac{p^2}{2M})t)\right] \quad (25)$$

(où  $\hat{\zeta}_{\vec{p}\lambda}$  est un vecteur unitaire correspondant à la polarisation  $\lambda$ ), par une densité hamiltonienne d'interaction de la forme:

$$\tilde{\mathcal{H}}(x) = -\mu_{ba} \vec{\mathcal{E}}(x) \cdot \vec{\varphi}_b^\dagger(x) \varphi_a(x) + h.c. \quad (26)$$

Le calcul peut ensuite être mené comme dans le cas scalaire relativiste. Il permet de retrouver la relation entre les constantes de couplage  $\mu_{ba}$  et  $g_R$  [2] et donne lieu, après les moyennes angulaires, aux facteurs classiques 2/3 et 1/3 pour les coefficients d'Einstein A et B.

2-Dérivation relativiste de l'équation de Liouville-Von Neumann

Une description covariante de la mécanique quantique est obtenue en remplaçant l'équation de Schroedinger par l'équation de Tomonaga-Schwinger. L'équation correspondante pour l'opérateur densité  $\tilde{\rho}(\sigma)$  est [1]:

$$i\hbar \frac{\delta \tilde{\rho}(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = [\tilde{\mathcal{H}}(x), \tilde{\rho}(\sigma)] \quad (27)$$

où la dérivée fonctionnelle par rapport à l'hypersurface du genre espace  $\sigma$  au point d'espace-temps  $x$  joue le rôle de la dérivée par rapport au temps dans l'équation de Schroedinger et où  $\tilde{\mathcal{H}}(x)$  est une densité hamiltonienne invariante. On peut simplifier l'équation 27 en choisissant une hypersurface  $\sigma(\tau)$  dépendant d'un paramètre  $\tau$ , par exemple la famille d'hyperplans  $n_\mu x^\mu - c\tau = 0$  où  $n_\mu$  est un vecteur unitaire du genre temps ( $n_\mu n^\mu = 1$ ). L'équation 27 devient:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\rho}(\tau)}{\partial \tau} = \int_{\sigma(\tau)} d\sigma [\tilde{\mathcal{H}}(x), \tilde{\rho}(\tau)] \quad (28)$$

où  $d\sigma = n_\mu d\sigma^\mu$ . Un cas particulier est celui des hyperplans à temps constant  $n^0 = 1$ ,  $x^0 = ct = c\tau$  pour lesquels l'équation précédente se réduit à l'équation de Liouville-Von Neumann. Ce choix ne peut se faire que dans un seul référentiel (par exemple celui du laboratoire) et  $n_\mu$  se transformera comme un 4-vecteur dans tout autre système de référence.

References

[1] Ch. J. Bordé, *Density matrix equations and diagrams for high resolution non-linear laser spectroscopy: Application to Ramsey fringes in the optical domain*, in *Advances in Laser Spectroscopy*, edited by F. T. Arecchi, F. Strumia and H. Walther (Plenum Publishing Corporation, 1983) p1-70.  
 [2] Ch. J. Bordé, *Amplification of atomic fields by stimulated emission of atoms*, *Physics Letters A* 204, 217-222 (1995)